La relatività ristretta

1.La cinematica relativistica

0.1 La relatività galileiana

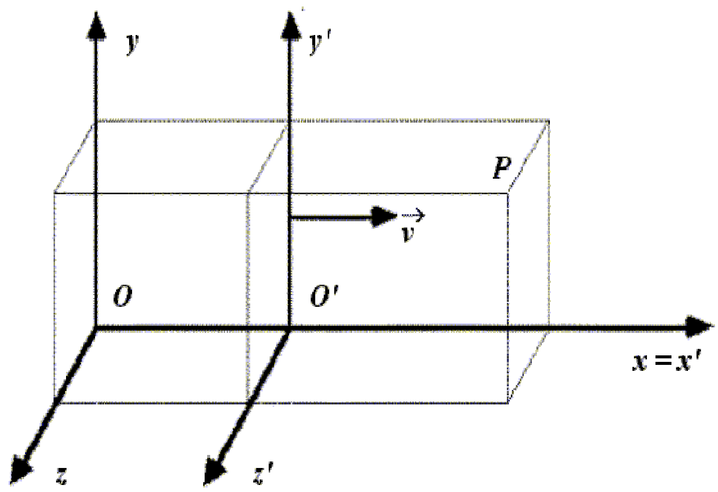
Galileo Galilei (1568-1642) scrisse nella Giornata Seconda del suo « Dialogo sui Massimi Sistemi del Mondo », (1623) che non é possibile, solo con esperimenti di meccanica, rivelare se un sistema é fisso, o si muove di moto rettilineo uniforme ed inoltre le diciture "corpo in quiete" e "corpo in moto rettilineo uniforme" hanno un significato meramente convenzionale, dipendente solo dal sistema di riferimento.

Due sistemi in moto relativo l'uno rispetto all'altro si dicono **INERZIALI** se in essi valgono le stesse leggi della meccanica; i sistemi che si muovono l'uno rispetto all'altro di **moto rettilineo uniforme** sono dunque inerziali.

Il **principio di relatività galileiana** afferma quindi l'assoluta equivalenza fisica di tutti i sistemi di riferimento inerziali: *nessun esperimento eseguito all'interno di un dato sistema di riferimento può evidenziare il moto rettilineo ed uniforme dello stesso sistema, o, in altre parole, le leggi fisiche scoperte da sperimentatori che lavorino in laboratori in moto relativo rettilineo ed uniforme devono avere la stessa forma.*

Si tratta ora di ricavare le formule che legano le coordinate spazio temporali di uno stesso evento visto da due diversi riferimenti e di provare che le leggi della fisica sono invarianti, nella forma, al passaggio da un riferimento all'altro; si tratta cioè di tradurre in formule il contenuto di questo principio. Consideriamo allo scopo due riferimenti (cioè due sistemi di assi cartesiani ortogonali):

$$\mathrm{K}\,(x, y, z, t) \;\text{ e }\; \mathrm{K'}\,(x', y', z', t')$$



riferiti rispettivamente alle origini **O** ed **O'**, di cui **O'** mobile rispetto ad **O** di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. Si supponga che gli osservatori solidali ad **O** ed **O'** siano dotati di due orologi per la misura dei tempi sincronizzati tra loro in modo che, per esempio, quando **O** coincide con **O'** entrambi gli orologi segnino zero. Non è restrittivo supporre che gli assi x e x' siano sovrapposti e scivolino l'uno sull'altro, in modo che v_0 sia parallela ad essi, mentre gli altri (y e y', z e z') restano paralleli fra di loro. Si consideri un certo evento fisico che avviene in un punto P con coordinate spaziali (x, y, z) in K e (x', y', z') in K', negli istanti temporali t e t' misurati dai due osservatori posti rispettivamente in **O** ed in **O'**.

Tenendo conto che **OO'** = $v_0\, t$ e che sembra ovvio supporre $t' = t$, dalla figura sopra segue subito che valgono le cosiddette **trasformazioni galileiane**:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&x = x' + OO' = x' + v_0\, t' \\
&y = y' \\
&z = z' \\
&t = t' \qquad\qquad (1.1)
\end{aligned}}
$$

Bisogna chiarire fin d'ora che questi sistemi di riferimento sono **SISTEMI A QUATTRO COORDINATE**: ogni punto di essi è definito da tre coordinate nello spazio e da una nel tempo, misurate le prime tre rispetto a un'origine spaziale, la quarta rispetto a un istante iniziale $t = 0$. Osserviamo in particolare che la quarta di queste formule è sempre stata ritenuta evidente, e lo è ancora oggi nella vita pratica. La negazione dell'ipotesi (perché si tratta di un'ipotesi e non di una proprietà dimostrata sperimentalmente!) che gli orologi dei due osservatori debbano segnare lo stesso tempo costituisce, come vedremo, uno degli aspetti innovativi della relatività einsteiniana.

Adesso passiamo alle velocità. Se un corpo si muove con velocità costante $v'(v'_x, v'_y, v'_z)$ rispetto a K', sapendo che il sistema **O'** si muove rispetto ad **O** con **velocità di trascinamento** v_0, parallela all'asse x, ricaviamo la velocità v del corpo rispetto a K .

Nei due sistemi di riferimento il tempo è univocamente determinato, ovvero scorre nello stesso modo, e si ha $dt=dt'$. Derivando le relazioni spaziali delle trasformazioni galileiane si ha:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&dx/dt = dx'/dt' + v_0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v'_x + v_0 \\
&dy/dt = dy'/dt' \qquad\quad \Rightarrow \quad v_y = v'_y \\
&dz/dt = dz'/dt' \qquad\quad \Rightarrow \quad v_z = v'_z \quad (2.1)
\end{aligned}}
$$

Queste sono le **formule per la composizione delle velocità** per la meccanica classica. Vedremo che esse dovranno variare completamente, non appena saranno introdotti i postulati di Einstein.

Facciamo un esempio.
Si supponga di essere su un carrello in movimento a **60 Km /h**, e di calciare un pallone a **40 Km /h**. Se lo si calcia nella direzione del moto, esso si muoverà (rispetto alla terra) a una velocità di **100 Km / h**; se lo si calcia invece in direzione opposta al moto, il pallone si muoverà a soli **20 Km / h**.

Le derivate nel tempo delle velocità (2.1), essendo v_0 costante, sono:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&d\,v_x/dt = d\,v'_x/dt' + 0 \quad \Rightarrow \quad a_x = a'_x \\
&d\,v_y/dt = d\,v'_y/dt' \qquad \Rightarrow \quad a_y = a'_y \quad \text{quindi si ha: } \Rightarrow a = a' \quad (3.1) \\
&d\,v_z/dt = d\,v'_z/dt' \qquad \Rightarrow \quad a_z = a'_z
\end{aligned}}
$$

L'accelerazione è invariante nei sistemi di riferimento inerziali e poiché nella meccanica classica la massa dei corpi è ritenuta un invariante, si ha che la forza $\vec{f} = m \cdot \vec{a}$ e le leggi della dinamica non dipendono dal sistema di riferimento.

Pertanto se consideriamo due sistemi in moto rettilineo uniforme fra loro non esiste alcun esperimento, nell'ambito della meccanica, che possa evidenziare quale dei due è fermo e quale è in moto, oppure se entrambi sono in moto.

Il "Principio di relatività Galileiana"afferma che tutte le leggi della meccanica sono sempre le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Si riteneva di poter estendere questa osservazione a tutte le leggi della fisica, ma il fatto che le equazioni di Maxwell non erano invarianti per trasformazioni di Galileo mise in dubbio la validità del principio di relatività galileiano e quindi l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali.

1.1 Una crepa nel palazzo di cristallo

Alla fine del XIX secolo, la Fisica raggiunse un traguardo straordinario, riuscendo a spiegare tutti i fenomeni elettrici e magnetici attraverso una teoria unitaria e perfettamente coerente, espressa dalle **quattro equazioni di Maxwell**, cosiddette dal loro ideatore, **James Clerk Maxwell** (1831-1879), considerato da alcuni il più grande fisico matematico di tutti i tempi. Esse permisero di dedurre, per via puramente teorica, che non esiste un campo elettrico separato dal campo magnetico, entrambi di natura vettoriale, ma che l'uno e l'altro sono manifestazioni di un'unica realtà fisica, il **campo elettromagnetico**. Inoltre, esse predicevano con esattezza straordinaria che tale campo elettromagnetico dovesse propagarsi nello spazio sotto forma di onde, nonostante nessun esperimento avesse rivelato una simile propagazione ondosa. La scoperta delle onde elettromagnetiche da parte di **Heinrich Hertz** (1857-1894) rappresentò perciò il più alto trionfo della costruzione maxwelliana.

A ciò deve aggiungersi il fatto che Newton aveva già fornito, quasi due secoli prima, una precisissima formulazione teorica della meccanica, oggi nota come **meccanica classica**, nella quale tutto viene dedotto a partire dall'**equazione di Newton**:

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} \quad \textbf{(4.1)}$$

Secondo il modello di Newton, espresso nella fondamentale opera ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica***, lo spazio ed il tempo sono realtà assolute (un discepolo di Newton arrivò a considerarle attributi di Dio!!!) ed identiche per tutti gli osservatori. In altre parole, le misure di lunghezze e di durate effettuate da due osservatori diversi risulteranno identiche; due eventi che hanno luogo nello stesso punto secondo un osservatore, avranno luogo nello stesso punto secondo qualsiasi altro osservatore; e due eventi giudicati simultanei da uno di essi, saranno simultanei per tutti. In questo contesto, per passare da un sistema di riferimento all'altro occorre fare uso delle trasformazioni galileiane.

In poche parole, usando sole cinque equazioni – l'equazione di Newton e le quattro equazioni di Maxwell – e le quattro formule delle trasformazioni galileiane, ovviamente sulla scorta del calcolo differenziale ed integrale era possibile prevedere in modo semplice ed univoco l'evoluzione nello spazio e nel tempo di qualsivoglia sistema fisico; e non solo di una palla da baseball o di un pianeta attorno alla sua stella, perché anche la coesione molecolare e la luce sono fenomeni elettromagnetici, e quindi rientrano nell'ambito di competenza delle equazioni di Maxwell. Una visione del mondo di questo tipo, nella quale, a partire da determinate condizioni iniziali, l'evoluzione possibile del sistema fisico in considerazione è una ed una sola, prende il nome di **meccanicismo**; essa dominò tutta la Fisica dell'800, ed alimentò la filosofia allora più in voga, quella positivistica.

Anche questo splendido e compiutissimo palazzo di cristallo presentava però una crepa, come sempre accade in tutte le opere della mano dell'uomo. Infatti, **l'equazione di Newton risulta invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo**. Ciò significa che l'equazione di Newton non è soggetta a variazioni nei sistemi di riferimento inerziali.

Orbene, se, assieme all'equazione di Newton, anche le equazioni di Maxwell compongono una teoria fisica perfettamente compiuta e coerente (la cosiddetta **Fisica Classica**), ci si deve aspettare che anch'esse risultino invarianti rispetto alle medesime trasformazioni. Ed ecco invece il colpo di scena: ci si accorse subito che **le equazioni di Maxwell non erano invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo**; comparivano altri termini, a secondo delle velocità relative del sistema di riferimento. In altri termini, cambiando il sistema di riferimento adottato, le equazioni di Maxwell non cambiavano solo nella forma; non erano assolutamente più valide! Se si ritiene valida la relatività galileiana, le equazioni di Maxwell sono sì verificate, perché consentono di predire risultati sperimentali, ma cambiano col sistema di riferimento.

Quest'aporia che indusse **i fisici teorici alla ricerca di trasformazioni per cui le equazioni dell'elettromagnetismo risultassero invarianti**. E chi credette di trovarle fu il fisico olandese Hendrik Lorentz. (**Trasformazione di Lorentz**).

La modifica delle trasformazioni di Galileo, formulata da Lorentz, deve portare necessariamente ad una modifica della Equazione fondamentale della Dinamica, se vogliamo salvare il principio di Relatività Galileiana. La teoria della relatività ha consentito l'estensione del Principio di Relatività Galileiana a tutti i fenomeni, e non solo a quelli meccanici!

Ma questo non è tutto, perché un semplice ostacolo di natura matematica non avrebbe giustificato la ricerca di una nuova Fisica, da sostituire a quella Classica, peraltro perfettamente in grado di spiegare pressoché tutti i fenomeni meccanici, elettrici e magnetici. A porre ulteriori problemi fu però la **luce**. Prima le osservazioni di **Thomas Young** (1773-1829) riguardanti i fenomeni di interferenza della luce (1800), e poi la costruzione teorica delle equazioni di Maxwell, fecero trionfare definitivamente il **modello ondulatorio della luce** a discapito di quello corpuscolare, risalente all'autorità di Newton. In altre parole, la luce è un'onda esattamente come il suono o le onde sismiche. Questo fatto però, lungi dal rassicurare gli animi dei fisici dell'ottocento, poneva loro una spinosissima questione: se la luce è un'onda, deve esistere un mezzo attraverso cui essa si propaga! Ma nessuno dei mezzi materiali conosciuti, come nel caso delle onde sonore o delle scosse di terremoto, può essere il sostegno delle onde luminose, giacché esse si propagano pure nel vuoto, come dimostra il fatto che i raggi solari raggiungono tranquillamente la terra (inoltre, se si leva l'aria da una campana di vetro sotto la quale è posto un campanello, il suono da esso emesso non ci raggiunge più, ma noi continuiamo comunque a vederlo).

Fu così introdotto un nuovo mezzo materiale, supposto impalpabile, trasparente e perfettamente elastico, che impregnerebbe ogni angolo dell'universo e trasporterebbe in ogni dove i raggi di luce, oltre che le onde radio e le radiazioni X e gamma. Per analogia con la celebre quintessenza di aristotelica memoria, a tale misteriosa realtà fu dato il nome di **etere**.

Questo strano materiale tuttavia poneva più problemi di quanti non ne volesse risolvere. Di che tipo di materia era composto? Perché di materia sicuramente doveva trattarsi, anche se a quei tempi il concetto stesso di "materia" non era ben definito, e la teoria atomica era ancora di là da venire. Ed in che modo permeava tutto l'universo? Doveva essere estremamente rigido, in modo da permettere la trasmissione di onde tanto veloci, ma allo steso tempo non doveva offrire alcuna resistenza al moto dei pianeti... Eppure, tutti accettarono di buon grado l'introduzione di questa stranissima sostanza, perché se non altro veniva incontro ad una delle principali preoccupazioni della Fisica Classica: essa poteva infatti rappresentare il **sistema di riferimento assoluto** per tutte le trasformazioni di Galileo, sostituendo quel «centro dell'universo» che, in un modello infinito del cosmo, non aveva alcun significato. La terra è in moto attorno al sole, il sole lo è intorno alla Galassia, questa lo è rispetto alle altre galassie, ma **l'etere può considerarsi "immobile"** in senso assoluto; immobile, come si diceva ai tempi, **rispetto alle stelle fisse** (il primo ad avanzare questa ipotesi fu Fresnel nel 1818). Dalle leggi di Newton risultava che nessun sistema di riferimento può ritenersi privilegiato rispetto agli altri; se il corpo B è in moto con velocità pari a 3 m/s rispetto al corpo A, ritenuto fermo, nulla proibisce di ritenere che sia fermo il corpo B, e che sia A a muoversi rispetto ad esso con velocità pari a 3 m/s, senza che le leggi della dinamica vengano violate. Parlare dunque di «posizione assoluta» di un corpo è privo di senso, esattamente quanto lo sarebbe cercare il «centro» di un piano illimitato. La meccanica newtoniana consente tutt'al più di parlare di «posizione relativa» ad un determinato osservatore. Anche il concetto di «velocità assoluta» va sostituito perciò con quello di «velocità relativa» ad un dato osservatore, potendo poi passare dalla velocità misurata da un sistema a quella misurata da un altro mediante le solite trasformazioni galileiane.

L'etere veniva a colmare questa lacuna, permettendo di stabilire una volta per tutte un sistema di riferimento nel quale le distanze, gli intervalli di tempo e le velocità potevano venire misurati in maniera univoca per tutti gli osservatori di questo mondo. Anche **la velocità della luce**, fissata univocamente dalla teoria elettromagnetica, **diventava «velocità assoluta» rispetto alla fantomatica etere**. Ma fu proprio questa la crepa che, allargandosi, finì per spezzare tutta quanta la costruzione!!!

Ogni teoria fisica che si rispetti è in attesa di un fatto sperimentale che ne neghi la validità e che conduca all'elaborazione di una nuova teoria di portata più ampia e generale e che includa la precedente come caso particolare.
La **relatività galileiana** or ora richiamata è forse l'esempio più eclatante di questa tendenza ed è certamente una delle teorie che più d'ogni altra hanno resistito tenacemente all'usura del tempo: ci sono voluti quasi trecento anni di progresso scientifico e tecnologico per evidenziarne i limiti e perché si avvertisse l'esigenza di ideare una teoria più ampia che spiegasse la totalità dei fenomeni fisici acquisiti alla conoscenza umana. La **TEORIA DELLA RELATIVITÀ**, elaborata dal grande fisico tedesco **Albert Einstein** (1879-1955), ha il suo fondamento proprio nello **smascheramento dell'assoluto nella Fisica**. La Fisica Classica sosteneva l'esistenza di grandezze immutabili e caratteristiche di ciascun corpo, inseparabili da esso perché connaturate nel suo essere: la lunghezza e la massa, in primo luogo. Einstein, con incredibili colpi di genio, smitizzò alcuni tra i fondamentali postulati della fisica classica ed aprì la strada ai più arditi sviluppi della fisica moderna.

Ma c'è un'altra teoria che venne superata dalla Relatività di Einstein: la **teoria classica dei campi** elaborata da Maxwell.

2.1 Il "vento d'etere" non esiste!

Il primo problema che i fisici dell'ottocento si posero é: **c'é un punto di riferimento invariante per tutti i sistemi?**

La teoria classica dei campi elettromagnetici imperniata sulle equazioni di Maxwell fornisce quale grandezza invariante la **velocità della luce** $\boldsymbol{c}$ che risulta:

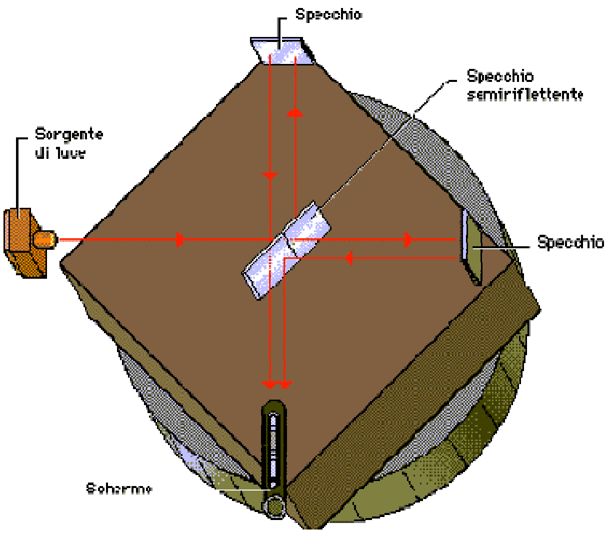
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (5.1) \qquad \Rightarrow \qquad c = 299.792.456{,}2 \; m\, s^{-1}$$

Dove ε_0 e μ_0 rappresentano rispettivamente la **costante dielettrica** e la **permeabilità magnetica del vuoto**. Si tratta di due costanti universali, invarianti in tutti i sistemi, indipendentemente dal sistema di misura.

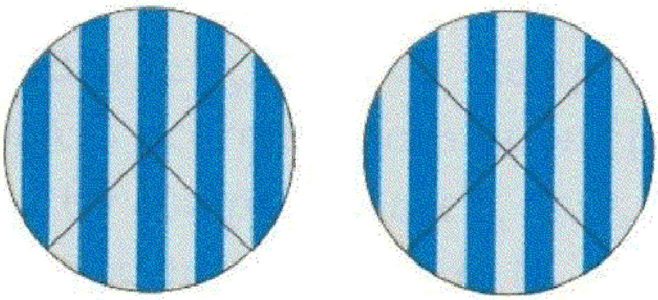
Quindi ci si aspetterebbe che $\boldsymbol{c}$ rappresenti la tanto sospirata **velocità assoluta**. Ed invece la legge di composizione delle velocità ***(2.1)*** contraddice questa speranza! Immaginiamo di viaggiare sul cosiddetto "**treno di Einstein**" (cui faremo più volte cenno da qui in avanti), un ipotetico treno futuribile che si muove a **240.000** ***Km/s***; accendendo i fari, la loro luce dovrebbe viaggiare a: **300.000 + 240.000 = 540.000** ***Km/s*** in palese disaccordo con l'affermazione ***(5.1)***.

Le prime prove a favore dell'invariabilità della velocità della luce nel vuoto furono date dall'**esperienza di Michelson e Morley** (1887), che ora descriverò in succinto, lasciandone l'analisi quantitativa agli studenti interessati. Nel paragrafo precedente abbiamo spiegato in che modo andò in voga la **teoria dell'etere**: la credenza che ogni perturbazione deve trasmettersi in un mezzo materiale, e non nel vuoto, condusse all'ipotesi dell'esistenza di una sostanza imponderabile che tutto permea. La velocità della luce risulterebbe così costante rispetto all'etere ($\boldsymbol{c}$), salvaguardando la ***(5.1)*** e tutta la teoria elettromagnetica. Ora, la Terra nel suo cammino attorno al sole si dovrebbe muovere nel mare d'etere grande quanto tutto l'universo, se è vero che questo mare è fermo, come si compete ad ogni riferimento che ha la pretesa di essere assoluto; dunque, dal punto di vista degli osservatori terrestri, l'etere si dovrebbe muovere in direzione opposta al moto del nostro pianeta.
La velocità orbitale della Terra è all'incirca a 33 Km/s. Le misure della velocità della luce effettuate sulla Terra dovrebbero dipendere dalla direzione di propagazione della luce stessa. Se il fascio di luce ha la stessa direzione e verso del moto orbitale terrestre si dovrebbe riscontrare una velocità della luce pari a $\boldsymbol{c-v}$, se il verso è opposto la velocità dovrebbe essere $\boldsymbol{c+v}$. Se la direzione del fascio di luce è perpendicolare al moto orbitale terrestre la velocità osservata dovrebbe essere $\sqrt{c^2+v^2}$

Ebbene, **Albert Michelson** ed **Edward Morley** pensarono di effettuare una doppia misurazione della velocità della luce, nella direzione del moto terrestre ed in direzione opposta, con lo scopo di confrontare i due risultati e di provare il moto della Terra attraverso l'etere. Ma una simile misura era più facile a dirsi che a farsi, poiché la velocità orbitale del nostro pianeta poteva incidere sulla velocità della luce al massimo per una parte su diecimila. I due scienziati ebbero allora l'idea di utilizzare un complesso apparato di specchi (**INTERFEROMETRO**), che sfruttasse proprio il fenomeno dell'interferenza tra raggi di luce che hanno percorso cammini ottici differenti. Il loro interferometro aveva più o meno quest'aspetto:



In esso, un raggio di luce colpisce uno specchio semiargentato, e quindi semiriflettente (*al centro della figura*): in parte esso é riflesso su di uno specchio (*in alto*), che lo riflette nuovamente, in parte lo attraversa ed é riflesso su un altro specchio. Il primo di questi raggi attraversa lo specchio semiargentato, il secondo è da questo riflesso in direzione ortogonale, cosicché i due raggi si sovrappongono prima di giungere ad uno schermo (in basso). Essendo derivati da un'unica sorgente luminosa, i due raggi sono tra loro coerenti (cioè hanno stessa intensità, stessa ampiezza e stessa lunghezza d'onda); avendo percorso cammini ottici di uguale lunghezza, essi giungono sullo schermo in fase, e quindi la luminosità totale sarà raddoppiata. In effetti, Michelson e Morley inclinarono gli specchi in modo che i raggi risultanti non fossero esattamente paralleli, ma formassero l'uno rispetto all'altro un angolo piccolissimo. Questo è sufficiente perché i cammini ottici non siano più identici, e quindi sullo schermo si formano delle frange di interferenza, come quelle visibili in figura:



Prima della rotazione   Dopo la rotazione

Se però ruoto l'interferometro di 90°, anziché al raggio orizzontale la velocità orbitale della Terra si sommerà al raggio verticale, e dunque la differenza di cammino ottico fra i due raggi varierà; si dovrà quindi avere uno **spostamento nelle frange di interferenza**. Se $\boldsymbol{L}$ è la lunghezza del braccio dell'interferometro e $\boldsymbol{v}$ è la presunta velocità della Terra rispetto all'etere, la differenza tra i cammini ottici dovrebbe essere dato dalla formula:

$$\Delta x = 2\,L\,\frac{v^2}{c^2} \qquad \textbf{(6.1)}$$

Lo spostamento così ottenuto dovrebbe equivalere a circa mezza lunghezza d'onda della luce gialla, e quindi dovrebbe essere tale da portare le frange scure sulle frange chiare e viceversa, proprio come illustrato nella figura qui sopra. Nel suo primo esperimento di questo genere, condotto da solo nel 1881, Michelson non notò nulla ma, siccome l'apparecchiatura era piccola, pensò che la differenza di cammino ottico si confondesse con gli errori sperimentali. Per questo nel 1887 egli ritentò, assieme a Morley, usando un'apparecchiatura molto più grande, tale che il percorso totale dei raggi di luce misurasse almeno 11 metri; stavolta la differenza dei cammini ottici nei due casi doveva uguagliare esattamente mezza lunghezza d'onda della luce utilizzata, e quindi lo spostamento delle frange di interferenza doveva essere evidente. Ma, a sorpresa, nemmeno stavolta si notò nulla, ed alla stessa conclusione giunsero tutti coloro che, con tecniche più o meno perfezionate, ripeterono lo stesso esperimento.

Ci fu chi, per salvare la Teoria Classica dei Campi, azzardò l'ipotesi che la Terra trascinasse con sé l'etere nel proprio moto, così come trascina con sé l'atmosfera; ma allora dove andrebbe a finire l'impalpabilità e l'infinita elasticità della quintessenza di aristotelica memoria? E che razza di sistema di riferimento assoluto esso rappresenterebbe, se si muovesse di moto relativo assieme a tutti i corpi che incontra?

Conclusioni: **l'esperienza di Michelson e Morley era stata concepita per dimostrare che la luce può avere velocità diverse per diversi osservatori in moto relativo rispetto all'etere**, attraverso la dimostrazione dell'esistenza di una sorta di «**vento d'etere**», dovuto in realtà all'immobilità in senso assoluto della quintessenza, ed al moto relativo rispetto ad esso della Terra lungo la propria orbita, sulla scorta della presunta validità della composizione galileiana delle velocità. Il fatto che **l'esperimento sia clamorosamente fallito** non poteva far altro che smentire gli assunti di partenza, **mostrando una volta per tutte che la luce ha sempre la stessa velocità per tutti gli osservatori**, come suggerito dalla ***(5.1)***, e che evidentemente **le trasformazioni di Galileo *(1.1)* non sono valide per tutti i sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro**. Anziché cementare la crepa che minava la solidità del castello della Fisica, Michelson e Morley la allargarono ulteriormente, mostrando che la meccanica galileo-newtoniana e la teoria elettromagnetica di Maxwell erano intimamente inconciliabili.

In realtà, come abbiamo già detto nel paragrafo precedente, **i fisici sapevano già che le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz, non rispetto a quelle di Galileo, e questo ben prima che il genio di Einstein pubblicasse le sue mirabolanti teorie**.
Già si sapeva insomma che, se si vuole conservare la forma delle quattro equazioni dell'elettromagnetismo, la somma delle velocità non può più consistere nella semplice somma vettoriale, e questo, come vedremo, implica proprio che deve giocoforza esistere una velocità maggiore di tutte le altre. **Nessuna teoria fisica però giustificava quelle trasformazioni, che restavano un giochetto matematico** e niente più; e così, tutti erano impegnati alla ricerca del fantomatico etere, come novelli Parsifal alla caccia del Sacro Graal, e Michelson continuava a perfezionare i suoi interferometri, sperando di osservare l'inesistente spostamento delle frange d'interferenza... **finché non arrivò quell'apparentemente modesto scienziato ebreo che cambiò la Fisica moderna**.

3.1 Le trasformazioni di Lorentz

Nel 1904 Lorentz modificò le trasformazioni di Galileo per ottenere un insieme di equazioni rispetto alle quali fossero invarianti le leggi dell'elettromagnetismo. Lorentz e Fitzgerald introdussero, alla fine del XIX secolo, un fattore che si rappresenta generalmente con la lettera greca γ(gamma) e che dipende dalla velocità dell'oggetto (v) secondo l'equazione:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{con} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

dove c è la velocità della luce.

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali, ed un altro che si sposta rispetto ad esso con velocità costante v in modo che gli assi x e x' coincidano scivolando l'uno sull'altro, e gli altri (y e y', z e z') restino paralleli fra di loro, e consideriamo i due diversi sistemi di coordinate:

$$K\,(x, y, z, t) \quad e \quad K'\,(x', y', z', t')$$

riferiti rispettivamente alle origini **O** e **O'**, come abbiamo già fatto nel ***paragrafo 0.1.*** Se K' si muove rispetto a K con velocità v nella direzione dell'asse x, le trasformazioni di Lorentz risultano:

$$x' = \frac{x - v t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Le trasformazioni di Lorentz non trattano separatamente il tempo e lo spazio, che vengono invece correlati tra loro.
Se v é molto vicino a zero, cioé se $v << c$, si ritorna alle trasformazioni classiche di Galileo ***(1.1),*** perché $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1$ e $\frac{v x}{c^2} \approx 0$.
Le correzioni relativistiche sono di scarsa importanza per la maggior parte dei fenomeni che hanno luogo sulla Terra, ma diventano significative negli studi astronomici, che riguardano corpi con velocità molto elevate.
Le formule inverse si ottengono senza calcoli, solo tenendo conto che, se K' si considera fisso, sarà K a muoversi con una velocità $-v$; allora ad x si deve sostituire x' e t' a t. Si ha così:

$$x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{v x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \textbf{(8.1)}$$

4.1 I postulati di Einstein

James C. Maxwell era profondamente convinto dell'esistenza dell'etere, come testimonia il fatto che, alla voce «***Ether*** » compilata per la nona edizione dell'Enciclopedia Britannica, scrisse:

« *Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza...* »

Come abbiamo visto, tuttavia, questa incrollabile fede nell'esistenza dell'etere era destinata ad essere messa in discussione appena otto anni dopo la morte di Maxwell, l'artefice della Teoria Classica dei Campi, a causa dell'esperienza di Michelson-Morley. Ed in effetti lord Kelvin, uno dei padri della Termodinamica, in una conferenza tenuta il 27 Aprile 1900, parlò di tale esperimento, «effettuato con la più attenta cura per garantire un risultato affidabile», come di «**una nube**» della fisica del XIX secolo sulla teoria della propagazione della luce.
Nel 1904 ancora Kelvin scrisse nella prefazione alle lezioni di Baltimora:

« *Michelson e Morley, con il loro grande lavoro sperimentale sul moto dell'etere rispetto alla terra, hanno sollevato l'unica obiezione seria contro le nostre spiegazioni dinamiche della luce...* »

Occorre dire, per completezza, che Michelson rimase sempre scettico nei confronti della teoria della relatività ristretta, che purtroppo comportava la scomparsa dell'etere, ed i suoi pregiudizi verso la nuova teoria perdurarono fino alla morte: pregiudizi tipici dei fisici sperimentali di stampo ottocentesco, affetti da un vero e proprio "horror vacui". Ecco cosa sostenne Michelson ancora nel 1927 nel suo libro « Studies in Optiks » in cui presentò il suo punto di vista sulla Relatività Ristretta e le trosformazioni di Lorentz:

« *L'esistenza di un etere appare inconsistente con lo teoria della Relatività; ma senza un mezzo come si può spiegare la propagazione delle onde di luce? [...] Come si può spiegare la costanza della propagazione della luce se non c'è nessun mezzo?* »

Una possibile spiegazione dell'esito dell'esperimento di Michelson e Morley fu fornito indipendentemente dal fisico irlandese **George F. Fitzgerald** (1851-1901) nel 1892 e dall'olandese **Hendrik Lorentz** (1853-1928) nel 1895. Essi fecero osservare che i risultati negativi potevano spiegarsi ammettendo che **il braccio dell'interferometro in moto attraverso l'etere** nel senso del movimento della terra (quello orizzontale) **si fosse accorciato**. Quest' ipotesi può apparire piuttosto artificiosa, ma Lorentz la spiegava ipotizzando che le forze di coesione della materia fossero essenzialmente di nature elettrica, e quindi il movimento attraverso l'etere poteva modificare le posizioni di equilibrio degli atomi.
In pratica, **Lorentz assunse che le equazioni di Maxwell siano valide solo in un sistema di riferimento privilegiato, quello in cui l'etere è fermo**. Ma allora come trascrivere le equazioni per un altro sistema in moto rispetto al primo? Lorentz si rese conto ben presto del fatto che ogni modifica nella forma di quelle equazioni avrebbe comportato che negli altri sistemi di riferimento le leggi (di natura sperimentale) dell'elettromagnetismo sarebbero diverse; da ciò **sarebbe seguita la possibilità di rivelare lo stato di moto rispetto all'etere**. Ma, pensò Lorentz, se **tutti gli esperimenti volti a rivelare lo stato di moto della terra rispetto all'etere avevano dato esito negativo, solo un'ipotesi poteva essere sostenuta**: quella secondo cui **esistono delle trasformazioni, diverse da quelle galileiane, che lasciano inalterate le equazioni di Maxwell**.
Nel 1904 Lorentz scrisse in forma definitiva queste **trasformazioni che, oltre a coinvolgere le coordinate spaziali**, per garantire il risultato corretto **prevedono una trasformazione anche per il tempo**. Egli tuttavia non attribuì significato fisico a questo "tempo modificato"; lo chiamò «**tempo locale**» ma, come scrisse egli stesso anni dopo la pubblicazione della teoria della relatività:

*« ...Io non pensai mai che questo tempo avesse niente a che fare con il tempo reale. Questo tempo reale per me era ancora rappresentato dalla più antica nozione classica di tempo assoluto, indipendente da ogni sistema di riferimento. Esisteva per me un solo tempo vero: consideravo la mia trasformaznone del tempo solo come un'***ipotesi di lavoro euristico***, di modo che la teoria della relatività è davvero solo opera di Einstein. »*

Lorentz anticipò i risultati di **Einstein** sulla **Relatività Ristretta**, eppure non seppe capirne il senso fisico. Einstein lavorò in modo diverso. Per nulla preoccupato di sfatare tabù che resistevano fin dai tempi del grande Newton, egli comprese che, **quando ci si muove a velocità prossime a quella della luce, spazio e tempo subiscono delle effettive trasformazioni che non li rendono più entità assolute**, o addirittura metafisiche. Se si dava credito all'esperienza di Michelson e Morley, una cosa sola appariva costante nel passare da un sistema di riferimento ad un altro: la velocità della luce, uguale sia nella direzione del moto della Terra che in direzione opposta. Ed egli partì proprio da qui, assumendo come **nuovo postulato** che **non lo spazio né il tempo, ma *c* sia invariante per tutti gli osservatori**. Questa semplice ipotesi avrà conseguenze a dir poco esplosive.
La teoria della Relatività Ristretta (o Relatività Speciale) fu inaugurata da Einstein il 30 giugno 1905 sugli « Annalen der Physik » in una fondamentale memoria intitolata « **Zur Elektrodynamik bewegter Körper** » (Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento). In quell'articolo egli scrisse:

« ...Nessuna caratteristica dei fatti osservati corrisponde al concetto di un etere assoluto; [...] per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono anche le equivalenti equazioni dell'elettrodinamica e dell'ottica [...]. In quanto segue facciamo questa ipotesi e introduciamo l'ulteriore postulato, un postulato a prima vista inconciliabile colle ipotesi precedenti, che la luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità c che è indipendente dalla natura del moto del corpo che la emette. Queste due ipotesi sono del tutto sufficienti a darci una semplice e consistente teoria dell'elettrodinamica dei corpi in movimento basata sulla teoria di Maxwell per i corpi in riposo »

Tutta la teoria di Einstein è basata dunque su due postulati fondamentali:

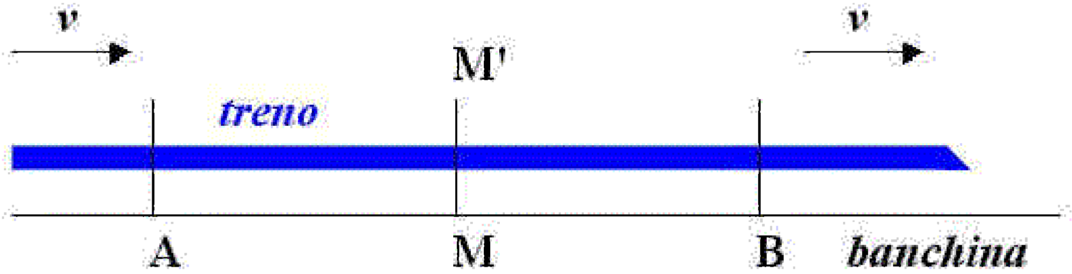
- **Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Non esiste un sistema inerziale privilegiato (*Principio di relatività*).**
- **La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali (*Principio della costanza della velocità della luce*).**

Il primo di essi rappresenta un'estensione, a tutti gli eventi, del principio di relatività galileiana, che non risulta così annullato, bensì superato attraverso il secondo postulato.
Con questi due soli postulati Einstein rivoluzionò l'intero mondo della Fisica.

5.1 La simultaneità

Lettura: La critica di Einstein al concetto di simultaneità
(da A.Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*)

« Le nostre considerazioni sono state finora svolte rispetto a un particolare corpo di riferimento, a cui abbiamo dato il nome di "banchina ferroviaria". Supponiamo che un treno molto lungo viaggi sulle rotaie con la velocità costante v e nella direzione indicata dalla figura. Le persone che viaggiano su questo treno useranno vantaggiosamente il treno come corpo di riferimento rigido (sistema di coordinate); esse considerano tutti gli eventi in riferimento al treno. Ogni evento poi che ha luogo lungo la linea ferroviaria ha pure luogo in un determinato punto del treno. Anche la definizione di simultaneità può venir data rispetto al treno nello stesso preciso modo in cui venne data rispetto alla banchina. Ora però si presenta, come conseguenza naturale, la seguente domanda: due eventi (ad esempio i due colpi di fulmine A e B che sono simultanei rispetto alla banchina ferroviaria), saranno tali anche rispetto al treno? Mostreremo subito che la risposta deve essere negativa.



Allorché diciamo che i colpi di fulmine A e B sono simultanei rispetto alla banchina, intendiamo: i raggi di luce provenienti dai punti A e B dove cade il fulmine si incontrano l'uno con l'altro nel punto medio M dell'intervallo A → B della banchina. Ma gli eventi A e B corrispondono anche alle posizioni A e B sul treno. Sia M' il punto medio dell'intervallo A → B sul treno in moto. Proprio quando si verificano i bagliori (giudicati dalla banchina) del fulmine, questo punto M' coincide naturalmente con il punto M, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità v del treno. Se un osservatore seduto in treno nella posizione M' non possedesse questa velocità, allora egli rimarrebbe permanentemente in M e i raggi di luce emessi dai bagliori del fulmine A e B lo raggiungerebbero simultaneamente, vale a dire si incontrerebbero proprio dove egli è situato. Tuttavia nella realtà (considerata con riferimento alla banchina ferroviaria), egli si muove rapidamente verso il raggio di luce che proviene da B, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da A. Pertanto l'osservatore vedrà il raggio di luce emesso da B prima di vedere quello emesso da A. Gli osservatori che assumono il treno come loro corpo di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce B ha avuto luogo prima del lampo di luce A. Perveniamo così al seguente importante risultato: ***gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (relatività della simultaneità)****. Ogni corpo di riferimento (sistema di coordinate) ha il suo proprio tempo particolare, una attribuzione di tempo è fornita di significato solo quando ci venga detto a quale corpo di riferimento tale attribuzione si riferisce. Orbene,* ***prima dell'avvento della teoria della relatività, nella fisica si era sempre tacitamente ammesso che le attribuzioni di tempo avessero un significato assoluto, cioè fossero indipendenti dallo stato di moto del corpo di riferimento. Abbiamo però visto or ora che tale ipotesi risulta incompatibile con la più naturale definizione di simultaneità****.* »

6.1 Un cono a... quattro dimensioni

Illustriamo il concetto di spazio tetradimensionale. Minkowsky, genialmente, oltre ad x, y e z introdusse la coordinata $i\,c\,t$, dove c é la velocità della luce ed $i = \sqrt{-1}$ é l'unità immaginaria, in modo da rendere le coordinate omogenee. Infatti moltiplicando c e t ho uno spazio, e quindi questa nuova coordinata ha le stesse dimensioni fisiche di x, y, z. **Lo spazio tetradimensionale di Minkowsky ($x, y, z, \; i\,c\,t$) rappresenta la spazio degli eventi (ogni evento è identificato dalle coordinate spazio-temporali) in cui ogni fenomeno fisico è rappresentato da una curva**.
Lo spazio tetradimensionale é perfettamente analogo a quelli mono-, bi- e tridimensionali, con l'unica differenza che la coordinata tempo é differente qualitativamente (non quantitativamente) dalle coordinate spaziali.

Ora, la distanza di due punti $\mathbf{A}(x_A)$ e $\mathbf{B}(x_B)$ in uno spazio **tridimensionale** é

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

In uno quadridimensionale, utilizzando la quarta coordinata tempo così come é stato introdotta da Minkowsky, poiché $i^2 = -1$, si ha che:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2}$$

Qualunque sia il sistema di riferimento, risulta chiaro che **la distanza di due eventi nello spazio-tempo** é:

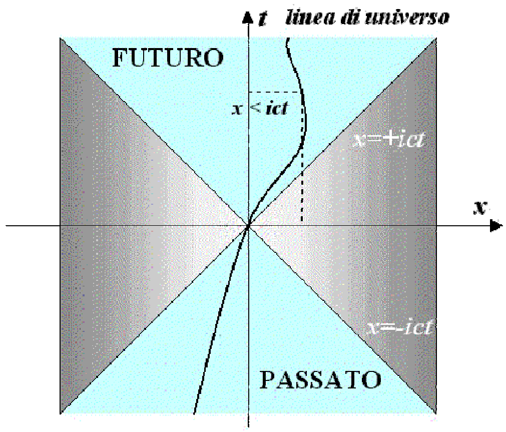
$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

Rappresentare il sistema tetradimensionale ($x, y, z, i\,c\,t$) é piuttosto difficoltoso; conviene di più, anche alla luce delle trasformazioni di Lorentz, rappresentare il sistema bidimensionale (x, $i\,c\,t$). Questo piano prende il nome di **CRONOTOPO**, dal greco "spazio-tempo". In questo sistema, le rette parallele all'asse x uniscono eventi **contemporanei** che prendono posto **in luoghi diversi**, mentre quelle parallele all'asse ict costituiscono una successione cronologica di eventi che prendono posto **nel medesimo luogo**. Tutte le rette passanti per l'origine degli assi costituiscono una successione di eventi che si spostano linearmente nello spazio e nel tempo, cioè **di moto uniforme**. Le curve passanti per l'origine sono invece successioni di eventi più generali.

Nel cronotropo la distanza tra due eventi risulta: $d^2 = x^2 - c^2 \Delta t^2$. Ci si accorge subito di qualcosa di importantissimo: in questo sistema di coordinate, **la distanza di due eventi può essere nulla** anche quando essi non coincidono! Infatti, se:

$$x = \pm i\,c\,t$$

la distanza dall'origine risulta: $d = \sqrt{x^2 - c^2 t^2} = 0$



Le due rette di equazioni $x = \pm i\,c\,t$ rappresentano l'insieme dei punti aventi distanza nulle e dividono il nostro piano in due parti di uguale ampiezza:

Nella zona colorata in azzurro (centrale) nel primo e nel secondo quadrante, risulta subito:

$$x < |i\,c\,t|$$

Poiché, a meno del fattore $\pm i$, $c\ t$ rappresenta la distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo che separa l'evento considerato dall'origine dei tempi, questo evento può essere **raggiunto** da un raggio di luce che parta dall'origine. La stessa relazione vale anche nella zona colorata in azzurro nel terzo e quarto quadrante, quindi l'origine può essere raggiunta da un raggio di luce che parte dall'evento considerato. Quest'ultima si chiama perciò la **ZONA DEL PASSATO**, l'altra la **ZONA DEL FUTURO**. L'origine costituisce il **PRESENTE**, quando $x = 0$ e $t = 0$. Le altre due zone grigie sono invece caratterizzate dal fatto che

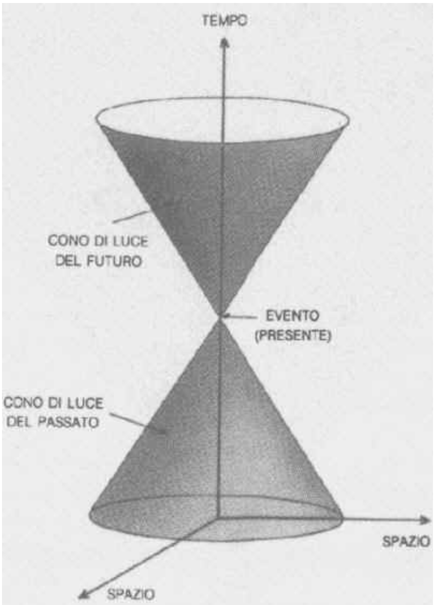
$$x > \left| i c t \right|$$

quindi la distanza x é maggiore di quella che la luce può percorrere nel tempo t. Tali punti risultano **IRRAGGIUNGIBILI** dall'origine (primo e secondo quadrante), o l'origine é irraggiungibile partendo da essi (terzo e quarto quadrante). Essi costituiscono tutti gli eventi che **non** possono influenzare o essere influenzati dal momento presente. In sostanza, ogni individuo nella sua vita percorre una linea che viene dal PASSATO, attraversa il PRESENTE (l'origine), e sfocia nel FUTURO. Arresti o dietrofront non sono ammessi. Si può percorrere solo una ben determinata, continua e crescente **LINEA DI UNIVERSO**.

Ecco un esempio. La stella Alfa-Centauri è posta a 4,3 anni luce dalla terra; ciò significa che, se invia al momento presente un raggio di luce nella nostra direzione, lo si vedrà solo fra 4,3 anni luce, e se noi inviamo un raggio di luce verso Alfa-Centauri, essa attenderà 4,3 luce anni prima di vederlo. Se per ipotesi io fossi fidanzato con una ragazza di Alfa-Centauri, e venissi a sapere che essa si sposerà tra 10 anni luce con un altro, io potrei raggiungere l'astro e mandare a monte le nozze, perché viaggiando alla velocità della luce ci metterei "solo" 4,3 anni luce; potrei farcela anche viaggiando su un razzo stile "bambola russa" che si avvicini alla fatidica velocità c pur senza raggiungerla. Se invece lo sciagurato matrimonio avvenisse tra soli 4,3 anni, l'unico modo che avrei a disposizione per non perdere la morosa è quello di puntare un raggio Laser collimatissimo contro la prima stella del Centauro, ed usarlo per incenerire il mio rivale d'amore proprio davanti all'altare, perché solo la luce può percorrere 4,3 anni luce in 4,3 anni. Ma io non potrei fare nulla se le nozze avvenissero solo tra 2 anni luce, perché neppure la luce sarebbe abbastanza veloce per riuscirci, ed Einstein mi proibisce di andare più svelto. Quell'evento é fuori dalla mia portata perché é anche fuori dalla portata della luce.

Introducendo la seconda coordinata y si ha lo spazio di Minkowsky rappresentato in figura. La zona colorata nella figura precedente prende il nome di **CONO DI LUCE.** Infatti, introducendo la coordinata y, esso assume la forma di un doppio cono

(immagine tratta da S.Hawking, *Dal Big Bang ai Buchi Neri,* [**11**]):



In questo caso il cono inferiore rappresenta il passato, il cono superiore rappresenta il futuro.

Introducendo anche la terza coordinata z, il cono diventa un **IPERCONO** in quattro dimensioni, non intuibile visivamente, perché il nostro cervello riesce a figurarsi al massimo oggetti in tre dimensioni.

Per ogni evento dello spazio-tempo possiamo costruire un cono di luce. Ogni linea di universo che attraversa l'interno del cono (o ipercono) di luce senza mai fuoriuscirne è permessa ad oggetti dotati di massa; le linee di universo contenute interamente nella superficie laterale del cono sono permesse ai raggi di luce, ma proibite per noi; **le linee di universo che si trovano al di fuori del cono** (quelle percorse dall'ipotetica Enterprise di capitan Kirk, per capirci) **sono proibite per tutti**. Poiché (secondo postulato di Einstein) la velocità della luce è la stessa per ogni osservatore, **tutti i coni di luce saranno IDENTICI** e puntati nella stessa direzione. Il **PASSATO**, il **FUTURO** e il **CONO DI LUCE** sono detti **INVARIANTI DELLO SPAZIO - TEMPO**, perché non cambiano qualunque sia il sistema di riferimento adottato.

7.1 L'orologio a luce

Il primo mito sfatato da Einstein fu quello del **tempo assoluto**. Uno dei cardini della fisica classica era la contemporaneità degli eventi fisici rispetto a tutti i sistemi di riferimento. Einstein dimostrò illusorio questo principio con il ragionamento dell'**orologio a luce**.

Nell'«orologio a luce», rappresentato nella figura a pagina seguente, la luce emessa nel punto A è soggetta alle riflessioni multiple di due specchi piani e paralleli, posti in A e B. In questo fenomeno periodico l'unità di misura del tempo è il periodo di una oscillazione completa, identificata con il percorso di andata e ritorno (tragitto **ABA**). In due orologi in quiete, ben sincronizzati, la partenza dei raggi di luce, la loro riflessione e la loro percezione saranno eventi contemporanei. Si ha quindi che **le misure di tempo fatto rispetto ad orologi in quiete coincidono.**
Ma se uno orologio si muove di moto relativo rispetto all'altro, con velocità uniforme v, che cosa accade?

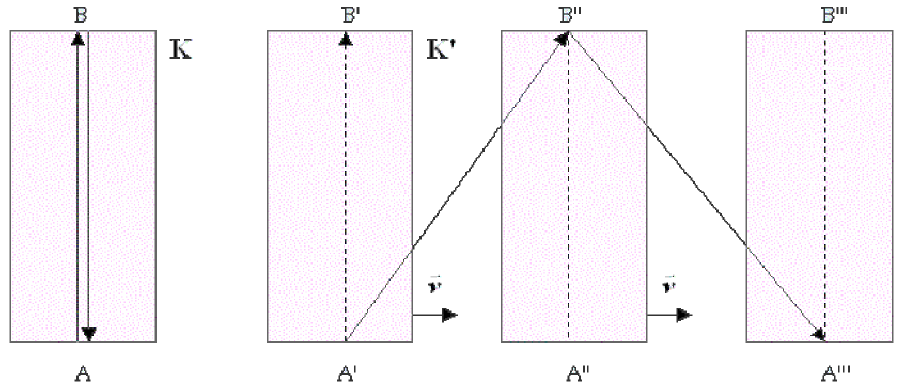
Consideriamo che **il sistema di riferimento K' si muove con velocità uniforme v rispetto al sistema di riferimento K** ed osserviamo le oscillazioni della luce nei due «orologio a luce» posti rispettivamente in K e K'. La velocità della luce è uguale nei due sistemi di riferimento e quindi **l'osservatore in K osserverà le oscillazioni del proprio orologio procedere con la stessa velocità con cui l'osservatore in K' osserverà le oscillazioni del proprio orologio**.
Ma in questo caso nessuno è in grado di descrivere il comportamento dell'orologio posto nell'altro s.d.r. poiché non risulta osservato.

Le cose cambiano radicalmente quando l'osservatore in K esamina l'orologio solidale al s.d. r. K' e quindi in moto rispetto ad esso. Esso potrà confrontare il moto dei raggi di luce e la velocità delle oscillazioni dei due orologi. Per l'orologio in moto il fascio di luce diretto verticalmente si compone con il moto traslatorio dell'orologio, e si ha la traiettoria diagonale della figura: non più **ABA**, ma **A'B''** e **B''A'''**. Nell'intervallo di tempo Δt in cui l'orologio solidale con l'osservatore percorrere il tratto **ABA** il fascio di luce dell'orologio in moto percorre uno spazio maggiore **A'B''A'''**. Da questa osservazione ne consegue che essendo la velocità della luce costante in ogni sistema di riferimento allora necessariamente le oscillazioni dei due orologi a luce rispetto all'osservatore solidale al s.d. r. K avvengono in tempi differenti.

Analizziamo nel dettaglio l'oscillazione dell'orologio a luce posto nel s.d.r. K'.

Per l'osservatore solidale al s.d.r. K' il raggio di luce parte da **A'** e torna nello stesso punto dello spazio **A'** in un intervallo di tempo $\Delta t'$, che è il tempo proprio di un'oscillazione nel s.d.r. solidale all'orologio. Nell'intervallo di tempo $\Delta t'/2$ il raggio di luce percorrerà la distanza **A'B'=A''B''=c**$\Delta t'/2$.

Per l'osservatore solidale al s.d.r. ***K*** i due eventi, emissione del raggio di luce in **A'** e ritorno del raggio riflesso in **A''**, avvengono in un intervallo di tempo Δt (tempo di un'oscillazione nel s.d.r. in moto rispetto all'orologio) ed in punti differenti dello spazio. Nell'intervallo di tempo $\Delta t/2$ il raggio di luce percorrerà la distanza **A'B''=c**$\Delta t/2$ e in questo stesso intervallo di tempo l'orologio a luce presenta la traslazione **A'A''=v**$\Delta t/2$.



Osservando il triangolo rettangolo **A' B''A''** si ha: $A'B''^2 = A'A''^2 + A''B''^2$

Sostituendo le relazioni precedentemente determinate si ha: $\frac{c^2\Delta t^2}{4} = \frac{c^2\Delta t'^2}{4} + \frac{v^2\Delta t^2}{4}$

da cui: $c^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2 + v^2 \Delta t^2$ ovvero $(c^2 - v^2)\,\Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2$

Con facili passaggi algebrici, considerando la condizione di realtà $0 \le v < c$, si ha:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \textbf{(9.1)},$$

essendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 0$ si ha $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ e quindi $\Delta t > \Delta t'$

Dove:

- $\Delta t'$ **è l'intervallo di tempo proprio** di una oscillazione dell'orologio a luce (posto nel s.d.r. ***K'***), ovvero l'intervallo di tempo **misurato da un osservatore a riposo rispetto ai due punti eventi che avvengono nello stesso spazio**;

- Δt **è l'intervallo di tempo dilatato**, ovvero l'intervallo di tempo di una oscillazione dell'orologio a luce **misurato da un osservatore**, solidale al s.d.r. ***K*, in moto rispetto ai due punti eventi che pertanto avvengono in punti differenti dello spazio**.

Si ha quindi che l'intervallo di tempo di una oscillazione Δt, misurato dall'osservatore in moto rispetto all'orologio osservato (posto nel s.d.r. ***K'***), è sempre maggiore del tempo proprio $\Delta t'$, misurato dall'osservatore in quiete rispetto agli eventi osservati.
Ovvero **lo stesso orologio procede più lentamente quando è osservato da un s.d.r. in moto, rispetto all'osservazione fatta nel s.d.r. solidale con l'orologio**.
Pertanto **l'osservatore solidale al s.d.r. *K*, asserisce che l'orologio del s.d.r. *K'* procede più lentamente di quello solidale al proprio s.d.r**.
Questo fenomeno è noto come **dilatazione dei tempi**.

Il fenomeno della dilatazione dei tempi e la relatività degli intervalli di tempo è presente non solo per gli orologi a luce ma per un qualsiasi fenomeno fisico. Per l'osservatore in moto rispetto al s.d.r. in cui si ha l'evoluzione del fenomeno fisico, che quindi avviene in punti differenti dello spazio, si ha una durata del fenomeno sempre maggiore di quella misurata da un osservatore solidale, rispetto al quale gli eventi fisici si verificano nello stesso punto dello spazio. In conseguenza della relatività della durata temporaneo dei fenomeni fisici va all'aria anche il concetto di **simultaneità** tra eventi.

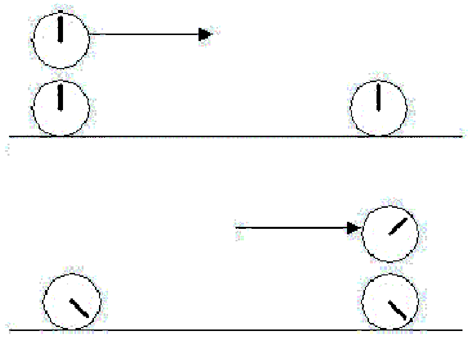
Le situazioni limite della relazione (9.1) sono:

- se $v << c$ si ha che Δt e$\Delta t'$ tornano a coincidere, in accordo con il tempo assoluto della meccanica classica;
- se v tende a c si ha che il tempo Δt tende ad infinito.

È bene precisare che il fenomeno della dilatazione dei tempie è simmetrico. L'osservatore in ***K'*** considerando l'orologio solidale al s.d. r. ***K***, giungerebbe alla stessa conclusione, ovvero, affermerebbe che è l'altro orologio ad essere in moto e quindi ad andare più lentamente di quello solidale col proprio s.d.r.. Infatti essendo il s.d.r ***K*** è in moto rispetto a ***K'*** con velocità **-*v*,** nella relazione della contrazione delle lunghezze occorre sostituire al posto di v la velocità di trascinamento $-v$, per la presenza del quadrato si ottiene la stessa relazione di dilatazione dei tempi:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Possiamo affermare che **gli orologi in moto avanzeranno sempre più lentamente di quelli in quiete rispetto all'osservatore**, così come è rappresentato nella figura seguente



Facciamo un esempio di dilatazione dei tempi, considerando il treno di Einstein, che si muove alla smisurata velocità di 240.000 Km / s.
Al passaggio del treno in una stazione viene accordato l'orologio interno al treno con quello sulla pensilina. Dopo che è passata un'ora per il viaggiatore ci si accorge che, al passaggio ad una nuova stazione, l'orologio di questa segna che é trascorsa più di un'ora, e precisamente:

$$t' = \frac{60\,min}{\sqrt{1-\left(\frac{240.000}{300.000}\right)^2}} = 100\,min$$

Per il capostazione la situazione sarebbe speculare ovvero è il suo orologio ad indicare che è trascorsa un'ora mentre la sua eventuale osservazione dell'orologio del viaggiatore fornirebbe il risultato di 100 minuti.

Il concetto di tempo proprio e tempo dilatato è applicabile ad un qualsiasi fenomeno fisico. È detto **tempo proprio** l'intervallo Δt_0 misurato da un osservatore in quiete rispetto agli eventi. Per la dilatazione dei tempi qualsiasi altro osservatore in moto rispetto agli eventi osserverebbe un **tempo dilatato** maggiore del tempo proprio. La dilatazione dei tempi è data dalla relazione:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A questo punto sorge spontanea una domanda: la dilatazione relativistica dei tempi é una realtà fisica o una mera astrazione matematica? In effetti è più reale di quanto non si creda in quanto, senza di essa, spiegare taluni fenomeni é impossibile.

Un esempio?
Si prenda il caso dei mesoni μ, detti **MUONI**, prodotti naturalmente nell'alta atmosfera dallo scontro di particelle del vento solare con i nuclei degli atomi di gas rarefatti. Anzitutto vengono prodotti dei **PIONI**, mesoni molto comuni, secondo la reazione: $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$

In circa 10 secondi, il pione negativo decade in un muone e in un antineutrino muonico $\bar{\nu}_\mu$, un leptone "compagno" del muone di cui si sa ancora pochissimo: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

La vita media dei muoni é molto bassa, circa 2,2 microsecondi, assai minore del tempo necessario per giungere sulla superficie terrestre. Eppure, si riesce a rivelare un gran numero di muoni che riescono a raggiungere la bassa troposfera.

Una sola spiegazione è possibile: grazie alla dilatazione dei tempi, la loro vita media si é **ALLUNGATA**! Ma, da buoni studenti di Relatività, potete fornire una descrizione del fenomeno dal punto di vista dei muoni stessi, ed affermare che essi vedono la Terra venire loro incontro ad una velocità prossima a quella della luce, il che comporta una... contrazione delle sue dimensioni, e quindi anche della loro distanza dal suolo, come vedremo in seguito!

8.1 Contrazione relativistica delle lunghezze

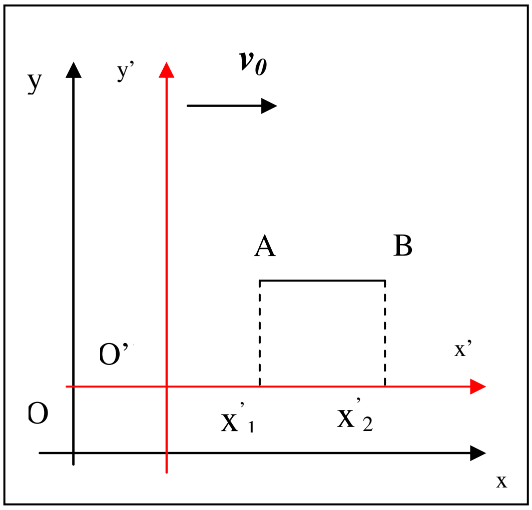
Allo stesso modo in cui si ebbe l'annullamento del concetto di tempo assoluto, la relatività ristretta fece crollare anche il mito della inalterabilità delle lunghezze. La lunghezza L di un corpo in movimento non è invariante, ma subisce una contrazione nella direzione del moto, data dalla formula

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \qquad \textbf{(10.1)}$$

dove v_0 è la velocità del corpo.

La lunghezza massima del corpo L_0 è misurata nel sistema in cui il corpo è in quiete e viene chiamata **lunghezza propria**.

Dimostrazione



Consideriamo i due sistemi di riferimento **K** ed **K'**, di origine **O** ed **O'**, con **K'** in moto rispetto a **K** di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 , parallela all'asse x' .

Un'asta rigida, in quiete rispetto ad un osservatore solidale con **O'** sia disposta parallelamente sull'asse x' e siano x'_1 e x'_2 le coordinate degli estremi dell'asta, la sua lunghezza misurata in K' é $L_0 = x'_2 - x'_1$.
Poiché l'asta é in moto rispetto ad un osservatore solidale con **O** per misurarne la lunghezza L, deve rilevare le coordinate delle estremità x_1 e x_2 nello stesso istante t e farne la differenza. Quindi utilizzando le trasformazioni di Lorentz si ha:

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - v_0 t_2) - \gamma(x_1 - v_0 t_1) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

da cui si ha:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$$

Consideriamo ora il caso in cui il regolo é in quiete ed ha lunghezza L_0 nel sistema di riferimento K e si vuole misurare la lunghezza L in K'. Questa volta il sistema di riferimento di quiete si muove con velocità $-v_0$, e nella relazione della contrazione delle lunghezze occorre sostituire al posto di v_0 la velocità di trascinamento $-v_0$, per la presenza del quadrato si ottiene la stessa relazione di contrazione delle lunghezze. La lunghezza L_0 di un'asta rigida, nel sistema di riferimento inerziale in cui é in quiete, si chiama **lunghezza propria**.

Essendo $\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} < 1$, la lunghezza L dell'asta in moto con velocità v_0 risulta inferiore alla lunghezza propria L_0 , ovvero si osserva una contrazione delle lunghezze dipende dal rapporto v_0/c.

Le situazioni limite della relazione (10.1) sono:

- se $v_0 \ll c$ si ha che L tende ad L_0 , in accordo con quanto previsto dalla meccanica classica;

- se v_0 tende a c si ha che la lunghezza L tende a zero.

La contrazione delle lunghezze origina fenomeni relativistici al di fuori del senso comune. Ad esempio supponiamo che l'ipotetico treno di Einstein sia lungo in quiete 2.400.000 Km (una lunghezza smisurata, ma anche la sua velocità di crociera è smisurata!) e che le pensiline delle stazioni da lui attraversate, in quiete (cioè a treno fermo in stazione), fossero di lunghezza uguale alla sua. Quando il treno attraversa una stazione senza fermarsi muovendosi alla smisurata velocità di 240.000 Km/s; un osservatore posto sulla pensilina vedrebbe un treno di lunghezza pari a soli 1.600.000 Km, e dunque assai più corto della pensilina! Ma, per quanto sia sconcertante, bisogna affermare che invece un osservatore posto su di una carrozza vedrebbe la pensilina muoversi di moto relativo con verso opposto a quello del treno, e quindi per lui... sarebbe la pensilina ad essere più corta del treno!!!

9.1 Composizione delle velocità

OK per spazio e tempo, ma... come si compongono le **VELOCITÀ**?
Se un corpo si muove con velocità costante v rispetto a K, quale velocità v' avrà rispetto a K'?
Dalle **trasformazioni di Galileo** si è dedotto che: $v = v' + v_0$

Rifacciamo un esempio a noi già noto, perché siamo partiti proprio da esso. Se si fosse sul treno di Einstein, che si muove pure a 240.000 Km / s, e si accendessero i fari, la loro luce dovrebbe viaggiare ad una velocità di:

(240.000 + 300.000) ***Km / s*** **= 540.000** ***Km / s*** , contraddicendo il secondo postulato di Einstein.

La composizione relativistica delle velocità deve essere dunque differente, se vogliamo salvaguardare i principi fondanti della Relatività; deduciamola dalle trasformazioni di Lorentz:

$$x = \frac{x' + v_0\, t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{v_0\, x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

dividendo membro a membro e due relazioni si ha: $\dfrac{x}{t} = \dfrac{x' + v_0 t'}{t' + \dfrac{v_0 x'}{c^2}}$

La velocità v_0 indica la velocità di trascinamento del s.d.r. K' rispetto al s.d.r. K.
A questo punto dividiamo entrambi i termini della frazione al secondo membro per t':

$$\frac{x}{t} = \frac{\dfrac{x'}{t'} + v_0}{1 + \dfrac{v_0}{c^2} \cdot \dfrac{x'}{t'}}$$

essendo $x/t = v$ (in K) e $x'/t' = v'$ (in K'), si ha: $$v_x = \frac{v_o + v_x'}{1 + \frac{v_o v_x'}{c^2}} \quad \textbf{(11.1)}$$

La relazione (11.1) è la relazione di composizione della componente della velocità nella direzione dell'asse x, ovvero dalla componente della velocità nella direzione della traslazione presente tra i due s.d.r. Qualunque sia il valore di v_o e di v_x' , v_x é sempre minore di c.

Si ha $v_x = c$ solo se una delle due velocità uguaglia c, infatti si ha: $v_x = \frac{v_o + v_x'}{1 + \frac{v_o v_x'}{c^2}} = \frac{c(v_o + c)}{v_o + c} = c$

Così, per tornare all'esempio precedente, i fari del treno di Einstein emetteranno luce che si muove sempre a 300.000 Km / s. Se invece dal treno si fa partire, nella stessa direzione del suo moto, un aeromodello che si muove pure a 240.000 Km / s, la sua velocità, rispetto alle rotaie, risulta:

$$v = \frac{240.000 + 240.000}{1 + \frac{(240.000)^2}{(300.000)^2}} = 292.683\ Km/h$$

e non **480.000** ***Km / s***, come avrebbe sostenuto chiunque prima di Einstein!

Anche le relazioni delle componenti della velocità perpendicolari al moto di traslazione dei due sistemi di riferimento presentano delle variazioni nella teoria della relatività.

Consideriamo ad esempio una particella in moto nella direzione dell'asse y del riferimento K con velocità v_y e determiniamo la sua velocità v'_y nel riferimento K', relativamente in moto rispetto a K nella direzione dell'asse x con velocità v_0.
Con le trasformazioni di Galileo essendo il tempo assoluto ($t = t'$) si otterrebbe: $v_y = v'_y$.
Mentre nelle relatività einsteiniana il tempo non è assoluto e si ha la dilatazione dei tempi. Dividiamo la coordinate spaziale $y' = y$ per la relazione della dilatazione dei tempi

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

si ha: $$v_y' = v_y \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \quad \textbf{(12.1)}.$$

La relazione (12.1) è la relazione di composizione della componente della velocità nella direzione dell'asse y, ovvero dalla componente della velocità nella direzione perpendicolare alla traslazione presente tra i due s.d.r.
Nella relatività einsteiniana la velocità perpendicolari al moto di traslazione di due riferimenti spaziali non è uguali nei due sistemi di riferimento. Nel s.d.r K' in moto perpendicolarmente alla particella,

essendo $\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} < 1$, si osserva una diminuzione della velocità.

Se v_0 tende a c si ha che la velocità trasversale tende a zero.

2 La dinamica relativistica

La dinamica relativistica si può costruire generalizzando, dove é possibile, la dinamica classica. Come in meccanica classica, ad ogni punto materiale si associa una massa, la cui misura, nella teoria relativistica, non verrà assunta indipendente dal sistema di riferimento in cui viene calcolata.

Il fatto che nessun oggetto fisico si possa muovere con velocità superiore a c non è assolutamente coerente con la meccanica newtoniana.

Per Newton una forza costante di modulo f che agisce su un corpo P di massa m imprime su di esso una accelerazione costante di modulo $a = \frac{f}{m}$ e poiché $v = a \cdot t = \frac{f}{m} t$ una forza costante, in un tempo opportuno, può far raggiungere a P qualunque velocità per quanto alta.

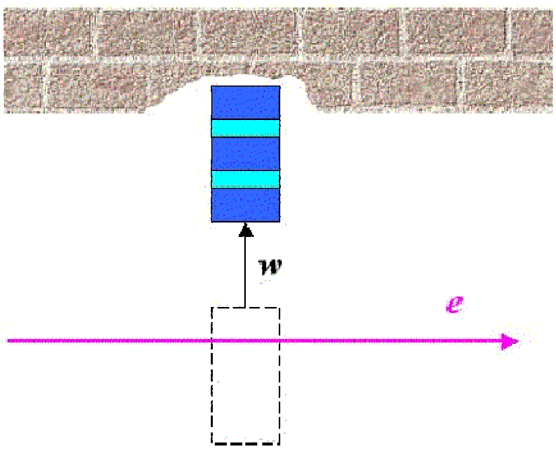
A questo punto sembra chiaro che il secondo principio della dinamica va modificato, e la modifica dovrà essere tale da salvaguardare il fatto che, per quanto a lungo una forza agisca su una particella, la velocità finale assunta dalla non superi c.

Dovrà inevitabilmente cadere un altro dei capisaldi della fisica classica, cioè il principio di conservazione della massa.

Infatti, se si ammette che la massa di P aumenta all'aumentare della velocità, fino a tendere all'infinito se v tende a c, allora una forza costante produce accelerazioni sempre minori e quindi sempre minori incrementi di velocità.
Verrà chiamata **massa propria**, la massa del punto misurata nel sistema di riferimento di quiete.

1.2 La massa e la quantità di moto nella relatività

Sono già crollate due grandezze tradizionalmente considerate immutabili dalla fisica classica: lunghezza e tempo. Ora vedremo come Einstein fece cadere anche un'altra testa illustre: quella dell'**immutabilità della massa**. E non é cosa da poco, perché tra l'altro massa significa anche **quantità di materia**, e tutta la chimica moderna, abbandonati i sogni degli alchimisti, si basava sul celebre **Principio di Lavoisier: « In natura, nulla si crea e nulla si distrugge »**. Insomma, non si può produrre un quintale di acciaio se non partendo da un'uguale quantità di ferro e di carbonio. Nessuno avrebbe dato credito all'idea che un uomo di 90 Kg possa aumentare a 150Kg senza una scorpacciata di 60 Kg di dolci; ora vedremo invece che ciò é possibilissimo.



Consideriamo un'automobile che si muove a velocità w verso un muretto (nella figura qui sopra essa è vista dall'alto) essa ha una quantità di moto $P=m\ w$. L'auto urta il muro (parte superiore della figura) e per il teorema dell'impulso si ha la variazione di quantità di moto: $I=F\cdot\Delta t=\Delta(m\ w)$. Se essa procede lentamente, toccando il muro, si fermerà senza scalfirlo; se la sua velocità, però, é elevata, possiede un impulso molto elevato e sfonda il muretto. Rimanendo incastrata in esso, vi trasferisce tutta la propria quantità di moto. Supponiamo ora che un elettrone passi, a velocità v, prossima a quella della luce, parallelamente al muretto. Per la contrazione dei tempi e per la relazione (12.1), esso vedrà l'automobile muoversi lentissima verso il muretto con velocità $w' = w\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, eppure sfondarlo, come se si potesse far crollare il muro di casa solo appoggiandovi la mano.

Per spiegare l'incongruenza che una bassa velocità ***w***' (***12.1***) possa imprimere un'altissima quantità di moto, bisogna ammettere che, mentre la velocità si é notevolmente ridotta, la sua **massa** sia **notevolmente aumentata**.

Einstein assume che la quantità di moto scambiata durante l'urto é sempre la stessa, ovvero è un'invariante nei sistemi di riferimento inerziali ***P=P'***.

Per l'auto nei due sistemi di riferimento si ha: $\boldsymbol{m\ w = m'\,w'}$

essendo $w' = w\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ risulta: $m \cdot w = m' \cdot w\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

La conservazione della quantità di moto nei due sistemi di riferimento impone una variazione della massa dell'auto. L'elettrone in moto osserva per l'auto la massa: $m' = \dfrac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Si ha quindi che anche la massa non è un grandezza assoluta ma relativa al sistema di riferimento.

Generalizziamo il risultato ottenuto.
Detta $\boldsymbol{m_0}$ la massa di un corpo nel sistema di riferimento in cui esso è in quiete (***massa propria***), la sua massa $\boldsymbol{m}$ in sistema di riferimento rispetto al quale è in moto con velocità $\boldsymbol{v_0}$ è:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \cdot m_0$$ **(1.2)** , dove γè il fattore relativistico di Lorentz.

*Il risultato ottenuto é importantissimo: con il crescere delle velocità, cresce anche la massa del corpo (**massa inerziale**). Non va confuso l'aumento relativistico della massa con l'impulso medesimo, cioè non si deve credere che un corpo che cade da un metro faccia meno danno di uno che cade da dieci perché va meno veloce e la sua massa é minore: a velocità così bassa rispetto ai 300.000 Km/s della luce, la massa é praticamente la stessa che a corpo fermo.*
Se una persona di 90 Kg di peso si trova sul treno di Einstein, la sua massa risulta di:

$$\boldsymbol{m = \frac{90\,Kg}{\sqrt{1-\left(\frac{250.000}{300.000}\right)^2}} = \frac{90\,Kg}{\frac{3}{5}} = 150\,Kg}$$

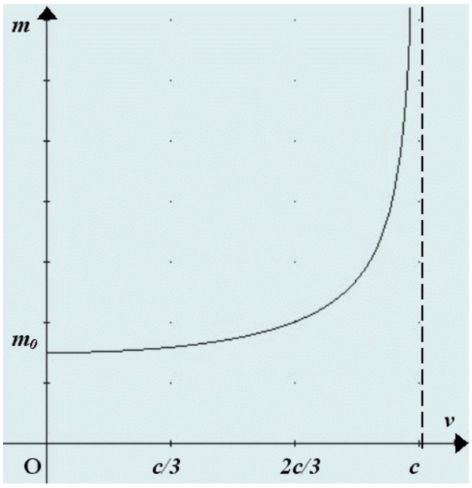
Come annunciato, un uomo di 90 Kg può aumentare di colpo dei due terzi del suo peso: basta che salga sul treno di Einstein...

L'espansione delle masse porta a conclusioni sorprendenti. Anzitutto, la condizione di esistenza dell'espressione che fornisce il valore di m é: $$0 \le v < c$$

Se in particolare v tende ad avvicinarsi a c: $$\lim_{v \to c} \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \infty$$

Ciò vuol dire che le velocità non possono crescere all'infinito. Secondo la fisica classica ciò era possibile; invece, a partire da Einstein, **la velocità della luce diviene insuperabile**.

Crollano così i sogni di poter costruire fantascientifiche astronavi in grado di macinare anni luce al secondo: un corpo potrà avvicinarsi alla velocità della luce, ma mai uguagliarla. Inoltre, ad altissime velocità andare più veloce risulta difficile. Infatti, la massa cresce sempre di più, e più un corpo é massiccio, più energia si dovrebbe fornire per imprimergli una certa velocità. Il Secondo Principio della Dinamica asserisce che applicando una forza F ad un corpo, essa gli imprime una accelerazione a. Secondo Newton al crescere di F, anche a doveva crescere indefinitamente. Invece, nella teoria della relatività, **una parte dell'energia fornita dalla forza applicata, invece di produrre ulteriore accelerazione, si riversa nella massa**.



É per questo che, accelerando un corpo, apparentemente si "crea" materia, contro il principio di Lavoisier. In realtà non vi é nessuna creazione: semplicemente, é **l'energia fornita al corpo che si trasforma in massa**. Fu proprio tale considerazione che condusse Einstein alla sua più grande scoperta.

Moltiplicando la relazione della massa **(1.2)** per la velocità v si ha la quantità di moto:

$$p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \cdot m_0 \cdot v$$ **(2.2)** , dove γ è il fattore relativistico di Lorentz.

2.2 I principi della dinamica nella relatività

Nella meccanica classica, in assenze di forze il punto materiale é isolato e nei sistemi di riferimento inerziali il suo moto é rettilineo ed uniforme (***v=cost***).

Nella dinamica relativistica, il ***primo principio*** è espresso dalla conservazione della quantità di moto: $\frac{d\vec{p}}{dt} = o$

Quindi nella teoria della relatività è conservato il ***primo principio della dinamica.***

In presenza di forze esterne, il sistema non é isolato e nella meccanica classica è valida l'equazione di Newton. Nella relatività occorre dare a questo principio una nuova formulazione.
Enunciamo il secondo principio della dinamica nel seguente modo: ***una forza costante produce una variazione della quantità di moto direttamente proporzionale alla forza stessa e alla durata della sua azione***.

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

È possibile dimostrare che, indicando con ***v*** la velocità e con ***a*** l'accelerazione del corpo si ha:

$$\vec{f} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{a} + \frac{d\gamma}{dt} m_0 \cdot \vec{v} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Sia l'equazione precedente, sia il principio di azione e reazione vanno usati con cautela in relatività ristretta, in quanto essi hanno senso per le interazioni che non implichino un'azione a distanza istantanea. Da qui nasce la difficoltà di descrivere un'interazione fondamentale come la gravità, nell'ambito relativistico. Difficoltà che ha condotto Einstein a formulare la teoria della relatività generale.

3.2 Il rapporto massa-energia

Il riconoscimento di una variazione della massa in funzione della sua velocità non modifica soltanto la legge fondamentale della dinamica ma anche le formule che legano fra loro la massa e l'energia tramite il lavoro di una forza.

Nella dinamica classica, il concetto di massa poteva considerarsi nettamente separato dal concetto di energia: una massa veniva pensata come dotata di energia ma certamente non veniva pensata come energia. Vediamo ora come muta la situazione nell'ambito della teoria della relatività. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se un corpo in quiete rispetto a un osservatore ***O*** ha massa $\boldsymbol{m_o}$, quando esso si muove ***la sua massa aumenta*** secondo la (**1.2**), cioè si ***incrementa di una quantità***:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 \quad \textbf{(4.2)}$$

Questo fatto è del tutto estraneo alle previsioni della fisica prerelativistica in base alla quale se un corpo in quiete ha massa $\boldsymbol{m_o}$, quando viene posto in movimento con velocità $\boldsymbol{v}$ esso non aumenta la sua massa ma viene a trovarsi dotato di ***energia cinetica*** pari a $\frac{1}{2} m_0 v^2$.

In ambito relativistico la situazione va invece vista in tutt'altro modo.

Riscriviamo la (**4.2**) in modo che i suoi due termini di destra possiedano un denominatore comune:

$$\Delta m = \frac{m_0\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

moltiplicando ora numeratore e denominatore per il termine $1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, si ottiene:

$$\Delta m = \frac{m_0\left[1-\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)} = \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \textbf{(5.2)}$$

Nel caso in cui $\boldsymbol{v}$ sia molto piccolo rispetto a $\boldsymbol{c}$, il rapporto $\boldsymbol{v^2/c^2}$ è senz'altro trascurabile rispetto a l, quindi la formula precedente diviene:

$$\Delta m = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}$$

Dunque l'incremento di massa risulta uguale, in prima approssimazione, al rapporto fra l'energia cinetica del corpo e il quadrato della velocità della luce.

Riscrivendo ora la formula di partenza: $\Delta m = m - m_0$ alla luce di questa conclusione, si avrà:

$\frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} = m - m_0$ ovvero, moltiplicando per $\boldsymbol{c^2}$ e riordinando si ha:

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \textbf{(6.2)}$$

Si consideri attentamente questa espressione.

Nell'ultimo termine di destra si riconosce l'ordinaria espressione dell'***energia cinetica di una particella*** di massa $\boldsymbol{m_o}$ e velocità $\boldsymbol{v}$. I termini $\boldsymbol{mc^2}$ e $\boldsymbol{m_o\, c^2}$ sono perciò omogenei a una energia e quindi Einstein ipotizzò che anch'essi dovessero esprimere delle energie.

Possiamo affermare che il termine: $\boldsymbol{E=m\cdot c^2}$ **(7.2)** ***« formula di Einstein »***

esprime ***l'energia complessiva del corpo*** nella sua forma più generale.

Ed il termine: $\boldsymbol{E_0=m_0\cdot c^2}$ **(8.2)** è una sorta di energia associata alla massa del corpo in quiete (detta ***energia della massa a riposo***)

Nelle considerazioni precedenti, siamo partiti dallo studio di un fenomeno dinamico ed il lettore potrebbe pensare che l'energia complessiva del corpo sia riferita sempre e comunque all'energia cinetica.

Le cose non stanno in questi termini: usando il termine energia complessiva, non si vuole fare alcuna distinzione fra energia ed energia. Allora, ad esempio, un corpo di massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ incrementerà la sua massa quando avrà acquistato velocità ma anche:

- quando avrà acquistato energia termica per effetto di un riscaldamento;
- quando avrà acquistato energia potenziale gravitazionale per effetto di un sollevamento contro la sua forza peso;
- quando sarà stato caricato elettricamente e avrà quindi acquisito energia elettrostatica.

Vi è ***un'equivalenza complessiva tra massa ed energia***, di qui il rifiuto einsteiniano di distinguere tra massa ed energia ed il principio rivoluzionario che un corpo materiale a riposo sia dotato di energia per il solo fatto di possedere massa.

Massa ed energia si equivalgano nel senso che l'energia può essere trasformata (seppure ad un tasso di cambio svantaggiosissimo) in massa.
D'altra parte, dalla massa si può ricavare un'enorme quantità di energia (1 grammo di massa equivale a $9 \cdot 10^{20}$ erg!): nei processi nucleari, quali la fissione, i prodotti derivanti dal processo di "spaccatura" degli atomi hanno massa inferiore a quella di partenza e la differenza tra la massa iniziale e quella finale è convertita in quantità devastanti di energia.

Nella relatività e valido ***il principio di conservazione della massa-energia: "in ogni fenomeno si conserva sempre la somma delle masse e delle energie coinvolte".***

4.2 L'espressione relativistica dell'energia cinetica di un corpo

La formula (**6.2**) è stata dedotta supponendo che la velocità del corpo sia molto piccola rispetto a ***c***. In caso contrario l'energia cinetica del corpo sarebbe espressa non solo dal termine $\frac{1}{2} m_0 v^2$ ma anche da altri termini che la nostra trattazione semplificata non ha permesso di evidenziare.

In ogni caso, però, vale la relazione:

energia cinetica = energia totale - energia della massa a riposo.

Si ha quindi:

$$E_c = m\,c^2 - m_0\,c^2 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0\,c^2 = m_0\,c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \quad (9) \qquad \textbf{(9.2)}$$

ovvero, usando il simbolo γ: $E_c = m_0\,c^2\,(\gamma - 1)$ **(10.2)**

Ricorrendo a questa formula è possibile capire come una particella di massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ possa assumere energia cinetica sempre più grande pur senza mai superare la velocità della luce (cosa inammissibile in base alla formula classica dell'energia cinetica).